Polynômes orthogonaux :

I Le développement

Le but de ce développement est de montrer que les polynômes orthogonaux associés à un certain poids ρ forment une base hilbertienne de $L^2(]a;b[,\rho)$.

Théorème 1 : [El Amrani, p.47]
Soit ρ une fonction poids sur $I=]a;b[\subseteq\mathbb{R}$.
S'il existe $\alpha>0$ tel que $\displaystyle\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\mathrm{d}x<+\infty$, alors les polynômes orthogonaux normalisés associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Preuve :
Soit ρ une fonction poids sur $I=]a;b[\subseteq\mathbb{R}$.
Supposons qu'il existe $\alpha>0$ tel que $\displaystyle\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\mathrm{d}x<+\infty$.

Pour montrer que les polynômes orthogonaux normalisés associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$, on va montrer que l'orthogonal de l'espace qu'ils engendrent est réduit à $\{0\}$:

Soit $f\in L^2(]a;b[,\rho)$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $<f,x^n>_\rho=0$.
Considérons la fonction :

$$\Psi:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ x&\longmapsto&\begin{cases}f(x)\rho(x)&\text{si } x\in]a;b[\\ 0&\text{sinon}\end{cases}\end{array}\right.$$

Pour tout réel $t\geq0$, on a $t\leq\dfrac{1+t^2}{2}$ (polynôme du second degré s'annulant en 1 uniquement) et donc :

$$\forall x\in]a;b[,\ |f(x)|\rho(x)\leq\frac{1}{2}\left(1+|f(x)|^2\right)\rho(x)$$

Et puisque ρ et ρf^2 sont intégrables (par hypothèse) sur $]a;b[$, on en déduit que $\Psi\in L^1(\mathbb{R})$.

Posons à présent l'application :

$$g:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times\mathbb{C}&\longrightarrow&\mathbb{C}\\ (x,z)&\longmapsto&f(x)\rho(x)e^{-izx}\end{array}\right.$$

et considérons la bande $B_\alpha=\left\{z\in\mathbb{C}\text{ tq }|\mathrm{Im}(z)|<\dfrac{\alpha}{2}\right\}$.

Ainsi que l'application :

$$F:\left|\begin{array}{ccc}B_\alpha&\longrightarrow&\mathbb{C}\\ z&\longmapsto&\displaystyle\int_a^b f(x)\rho(x)e^{-izx}\mathrm{d}x=\int_a^b g(x,z)\mathrm{d}x\end{array}\right.$$

Pour tout $z\in B_\alpha$, on a alors $|g(x,z)|\leq e^{\frac{\alpha|x|}{2}}|f(x)|\rho(x)$.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient de plus :

$$\int_a^b e^{\frac{\alpha|x|}{2}}|f(x)|\rho(x)\mathrm{d}x\leq\left(\int_a^b e^{\alpha|x|}\rho(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b|f(x)|^2\rho(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty\quad(*)$$

L'inégalité $(*)$ montre ainsi que F est bien définie et pour tout $z\in B_\alpha$, on a $|g(x,z)|\leq e^{\frac{\alpha|x|}{2}}|f(x)|\rho(x)=h(x)$ (avec $h\in L^1(]a;b[)$ d'après $(*)$ et qui ne dépend pas de z).

Comme de plus, l'application $x\longmapsto g(x,z)$ est intégrable pour tout $z\in B_\alpha$ et que l'application $z\longmapsto g(x,z)$ est holomorphe pour presque tout $x\in]a;b[$, le théorème d'holomorphie sous le signe intégral montre que la fonction F est holomorphe sur B_α et de plus :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall z\in B_\alpha,\ F^{(n)}(z)=(-i)^n\int_a^b x^n f(x)\rho(x)e^{-izx}\mathrm{d}x$$

On obtient en particulier que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ F^{(n)}(0)=(-i)^n\int_a^b x^n f(x)\rho(x)\mathrm{d}x=(-i)^n<f;x^n>_\rho=0\text{ (par hypothèse)}$$

L'unicité du développement en série entière d'une fonction holomorphe montre alors que $F=0$ sur un voisinage de 0. Le théorème du prolongement analytique implique alors que $F=0$ sur l'ouvert connexe B_α (car convexe) tout entier, et donc en particulier sur l'axe réel.

On en déduit que $F=\widehat{\Psi}=0$, et puisque $\Psi\in L^1(\mathbb{R})$, l'injectivité de la transformée de Fourier implique que $\Psi\underset{p.p.}{=}0$. Enfin, puisque $\rho>0$ (car il s'agit d'un poids), on en déduit que f est presque partout nulle sur $]a;b[$.

Finalement, on a montré que les polynômes orthogonaux orthogonaux normalisés associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

■

II Remarques sur le développement

II.1 Résultat(s) utilisé(s)

Dans ce développement, on a utilisé le théorème d'holomorphie sous le signe $\int$ ainsi que le principe du prolongement analytique dont on rappelle les énoncés :

Théorème 2 : Théorème d'holomorphie sous le signe $\int$ [El Amrani, p.411] :
Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : X \times \Omega$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Si les trois hypothèses suivantes sont satisfaites :
$*$ Pour tout $z \in \Omega$, la fonction $x \longmapsto f(x,z)$ est intégrable.
$*$ Pour tout $x \in X$, la fonction $z \longmapsto f(x,z)$ est analytique dans Ω.
$*$ Pour tout compact $K \subseteq \Omega$, il existe une fonction intégrable positive g_K telle que pour tout $(x,z) \in X \times \Omega$, $|f(x,z)| \leq g_K(x)$.
alors la fonction $F : z \longmapsto \int_X f(x,z)\mathrm{d}x$ est analytique dans Ω, et de plus, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $F^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(x,z)\mathrm{d}\mu(x)$.

Théorème 3 : Principe du prolongement analytique [Tauvel, p.52] :
Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a \in U$ et $f \in \mathcal{H}(U)$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
$*$ f est identiquement nulle dans U.
$*$ f est identiquement nulle dans un voisinage de a.
$*$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(a) = 0$.

Corollaire 4 : [Tauvel, p.52]
Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f, g \in \mathcal{H}(U)$.
Si f et g coïncident sur un voisinage de U, alors $f = g$ sur U.

Enfin, on a également utilisé l'injectivité de la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$:

Théorème 5 : [El Amrani, p.115]
La transformation de Fourier :

$$\mathcal{F} : \left| \begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \widehat{f} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \xi & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est une application injective.

II.2 Pour aller plus loin...

II.2.1 Sur les bases hilbertiennes...

Si l'intervalle I précédent est borné alors l'hypothèse est vraie pour $\alpha = 1$ et donc on obtient une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$. Cependant, sans l'hypothèse du théorème le résultat n'est plus vrai. En effet, considérons l'intervalle $]a;b[=]0;+\infty[$, le poids $\rho(x) = x^{-\ln(x)}$ et la fonction $f(x) = \sin(2\pi\ln(x))$.

Pour tout entier naturel n, on a alors :

$$< x^n; f >_\rho = \int_0^{+\infty} x^n \sin(2\pi\ln(x))x^{-\ln(x)}\mathrm{d}x$$

Le changement de variable bijectif $y = \ln(x)$ permet d'écrire :

$$< x^n; f >_\rho = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(n+1)y}\sin(2\pi y)e^{-y^2}\mathrm{d}y = e^{\frac{(n+1)^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(y-\frac{n+1}{2}\right)^2}\sin(2\pi y)\mathrm{d}y$$

Et un deuxième changement de variable $t = y - \frac{n+1}{2}$ donne alors :

$$< x^n; f >_\rho = (-1)^{n+1}e^{\frac{(n+1)^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(2\pi t)e^{-t^2}\mathrm{d}t = 0 \quad \text{(car l'intégrande est impaire)}$$

Ainsi, la famille des $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas maximale dans l'espace de Hilbert $L^2\left(]0;+\infty[;x^{-\ln(x)}\right)$, donc n'est pas totale. La famille des polynômes orthogonaux associée à ce poids particulier n'est donc pas totale non plus : ce n'est donc pas une base hilbertienne.

On peut cependant montrer que toute espace de Hilbert possède une base hilbertienne :

Théorème 6 : [El Amrani, p.49]
$*$ Tout espace de Hilbert E sur un corps $\mathbb{K}$ possède une base hilbertienne.
$*$ Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de E, alors l'application :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \ell^2_{\mathbb{K}}(I) \\ x & \longmapsto & (< x; e_i >)_{i\in I} \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces hilbertiens.

II.2.2 Base hilbertienne sur $L^2(\mathbb{R})$

L'espace $L^2(\mathbb{R})$ est séparable, donc les bases hilbertiennes de $L^2(\mathbb{R})$ sont dénombrables. Le théorème permet alors d'en exhiber une :

On considère $I = \mathbb{R}$, la fonction poids $\rho(x) = e^{-x^2}$.
On sait alors que $L^2(I, \rho)$ est muni d'une base hilbertienne qui est constituée des polynômes de Hermite donnés par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

De plus, les applications :

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}, \rho) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f\sqrt{\rho} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \Phi : \left| \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}, \rho) \\ f & \longmapsto & \frac{f}{\sqrt{\rho}} \end{array} \right.$$

sont des isométries bijectives inverses l'une de l'autre. Ainsi, comme les polynômes de Hermite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}, \rho)$, l'isométrie assure que $\left(P_n e^{-x^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

> **Remarque 7 : [Beck, p.112]**
> Grâce à cette même méthode, on peut construire une base hilbertienne de $L^2\left(\mathbb{R}^+\right)$ à l'aide des polynômes de Laguerre.

II.3 Recasages

Recasages : 201 - 208 - 209 - 213 - 245 - 250.

III Bibliographie

— Mohammed El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*.

— Patrice Tauvel, *Analyse complexe pour la licence 3*.

— Vincent Beck, *Objectif agrégation*.